UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control

ASIGNATURA: TÉCNICAS AVANZADAS DE CONTROL

EJERCICIOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 1

E1.1 INTRODUCCIÓN

Los procesos considerados en la Unidad Didáctica 1 tienen un comportamiento dinámico que, aunque variable con el tiempo, puede ser en general puntualmente aproximado por ecuaciones lineales cuando las variables de entrada y salida del proceso son medidas de forma incremental con respecto a sus valores de equilibrio. Los ejercicios que aquí se presentan pretenden realizar un análisis básicamente experimental, habiéndose presentado la teoría que subyace en múltiples tratados de control clásico a los que el alumno ha sido ya expuesto. Como es sabido, cualquier proceso cuya relación dinámica esta expresada por una ecuación lineal a diferencias puede descomponerse en la suma de procesos de primer y segundo orden, por lo que es pertinente que los ejercicios en cuestión analicen concretamente estos dos casos.

Los experimentos que se proponen sirven únicamente de ejemplo o guía y para exhortar al alumno a que profundice tanto como lo crea oportuno en dicha experimentación, que se justifica debido al hecho de que la aplicación de control adaptativo predictivo (AP), que será objeto de las Unidades Didácticas posteriores, está basada en la utilización de un modelo AP, cuyos parámetros son estimaciones de los parámetros del proceso.

Para realizar los ejercicios que se van a proponer para esta Unidad Didáctica, el alumno deberá disponer de un entorno de programación que le permita la simulación de procesos cuyo comportamiento dinámico esté regido por ecuaciones a diferencias, o por funciones de transferencia en z tales como las consideradas en los capítulos de esta Unidad Didáctica. En los ejercicios en simulación que vamos a considerar, asumiremos que los valores de equilibrio de entrada, salida y perturbaciones medibles del proceso son iguales a cero, por razones de simplicidad, y que los valores de dichas variables se miden como incrementos con respecto a estos valores de equilibrio.

El programa tipo de simulación que considerarán los ejercicios consistirá básicamente en un bucle *for* cuyo índice representará el tiempo de simulación, medido en períodos de control, cuyo valor inferior sería 0 y valor superior la duración del experimento. En cada ejecución del bucle las operaciones a realizar serán:

- Determinar la entrada al proceso y, en su caso, el valor de la perturbación medible.
- Ejecutar la ecuación del proceso para obtener el correspondiente valor de la variable de salida y, en su caso, la aplicación de un filtro a esta variable.
- Almacenar los datos de las variables de entrada-salida para su presentación gráfica o numérica, que sirva para el correspondiente análisis.

Entornos de programación de uso habitual que permiten la simulación previamente considerada son ,entre otros, Matlab, Excel, o cualquier otro que permita la creación de bucles de cálculo con ejecución de ecuaciones a diferencias. Nos referiremos a este entorno de programación como escenario de simulación genérico para la realización de los ejercicios que se proponen en esta Unidad Didáctica.

Los ejercicios que a título de ejemplo se proponen tienen como objeto, sin requerir una programación compleja, que el alumno experimente:

- La relación entre los parámetros del proceso y la naturaleza de estabilidad del mismo y, por lo tanto, su comportamiento dinámico.
- La influencia de la elección que se haga del período de control sobre el valor de los parámetros del proceso.
- La influencia que ejerce sobre el valor de los parámetros del proceso la aplicación de un filtro a la variable de salida.

E1.2 EJERCICIOS

El primer ejercicio que se propone pretende experimentar la relación entre los parámetros de un proceso de primer orden y su comportamiento dinámico.

Ejercicio E1.1.- Sea un proceso de primer orden cuya ecuación responde a

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) \qquad \text{(E1.1)}$$

donde k es el tiempo discreto de simulación, y función de transferencia es:

$$T(z) = \frac{bz^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

En el escenario de simulación previamente descrito, y partiendo de las condiciones iniciales de equilibrio, es decir, todas las variables de entrada-salida iguales a cero, aplicar como señal de control un escalón unitario en el instante de control k=10, siendo k el instante de control (correspondiente al índice del bucle *for* en la simulación), asignando a los parámetros a y b del proceso los valores que se indican en los siguientes casos:

1) a = 0,4; b = 0,6.
2) a = 0,9; b = 0,1.
3) a = 1,0; b = 0,1.
4) a = 1,1; b = 0,1.

Ajustar convenientemente las escalas de la representación gráfica para todos los casos, teniendo en cuenta la ganancia del proceso en los casos 1) y 2).

□

El ejercicio que se propone a continuación pone de relieve la influencia de la elección del período de control en el valor de los parámetros de la ecuación que representa al proceso.

Ejercicio E1.2.- El comportamiento dinámico de un proceso, cuando el período de control es igual a 1 seg., puede representarse mediante la ecuación (E1.1) del ejercicio anterior, donde el valor del parámetro a es igual a 0.9 y el valor del parámetro b es 0.1. Calcular:

1. La ganancia del proceso.
2. La ecuación que representaría el comportamiento dinámico de este mismo proceso si el período de control fuera igual a 3 seg.
3. La ecuación que representaría el comportamiento dinámico de este mismo proceso si el período de control fuera igual a m seg.
4. La ecuación que representaría el proceso con período de control m segundos, si la ganancia del proceso se hiciera igual a 5.
5. El límite de los parámetros a y b cuando el período de control tiende a infinito.
6. El límite de los parámetros a y b cuando el período de control tiende a cero.

Partiendo de las condiciones de equilibrio, representar gráficamente las respuestas a un escalón unitario de las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del proceso cuando el período de control es igual a 1 seg. y cuando el período de control es igual a 3 seg., estando en ambos casos el eje de tiempos en segundos. Comprobar que el valor numérico de ambas respuestas coincide en los instantes de control correspondientes al último período de control.

□

Los ejercicios que siguen pretenden experimentar , para sistemas de segundo orden, la relación entre el valor de los parámetros de la ecuación del proceso y su respuesta dinámica. El siguiente ejercicio considera procesos cuyas funciones de transferencia tiene polos reales.

Ejercicio E1.3. Sea un proceso genérico de segundo orden cuya ecuación responde a

$$y(k) = a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) \qquad \text{(E1.2)}$$

donde k es el tiempo discreto de simulación, y la función de transferencia en z es:

$$T\ (z) = \frac{b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

Consideremos la particularización de este proceso genérico, asignando valores a sus parámetros en los siguientes casos:

1) $a_1 = 1{,}6$; $a_2 = -0{,}64$; $b_1 = 0{,}04$
2) $a_1 = 1{,}0$; $a_2 = -0{,}25$; $b_1 = 0{,}25$
3) $a_1 = 0{,}4$; $a_2 = -0{,}04$; $b_1 = 0{,}64$
4) $a_1 = 1{,}0$; $a_2 = -0{,}16$; $b_1 = 0{,}16$
5) $a_1 = 1{,}9$; $a_2 = -0{,}88$; $b_1 = 0{,}02$

Para cada uno de estos casos:
1.- Calcular los polos de la función de transferencia.

2.- En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar un escalón unitario y obtener las gráficas correspondientes. Observar experimentalmente la ganancia del proceso y el tiempo de respuesta, que es el tiempo que la salida del proceso tardará en alcanzar una banda de ±5% alrededor del nuevo valor de equilibrio.

□

El siguiente ejercicio considera procesos cuyas funciones de transferencia tiene polos complejos conjugados.

Ejercicio E1.4. Sea un proceso genérico de segundo orden descrito por la ecuación E1.2 del ejercicio anterior. Consideremos la particularización de este proceso genérico, asignando valores a sus parámetros en los casos siguientes:

1) $a_1 = 1,2$; $a_2 = -0,37$; $b_1 = 0,17$.
2) $a_1 = 1,2$; $a_2 = -0,45$; $b_1 = 0,25$.
3) $a_1 = 1,2$; $a_2 = -0,72$; $b_1 = 0,52$.
4) $a_1 = 1,2$; $a_2 = -1,00$; $b_1 = 0,80$.
5) $a_1 = 1,2$; $a_2 = -1,17$; $b_1 = 0,97$.

Para cada uno de estos casos:
1.- Calcular los polos y la ganancia de la función de transferencia.
2.- En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar un escalón unitario, obtener las gráficas correspondientes, y observar el tiempo de respuesta.

□

Los sistemas de control a los que nos hemos referido en esta Unidad Didáctica y nos referiremos en las siguientes, consideran todos ellos que la señal de control se mantiene constante durante el período de control. Esta forma de actuar, corresponde a la acción de lo que se conoce en los libros clásicos de control para sistemas discretos como un retenedor de orden cero. La acción de este tipo de dispositivo introduce siempre un cero en la función de transferencia del proceso. En general, encontraremos ceros en las funciones de transferencia de los procesos. Los dos siguientes ejercicios pretenden experimentar la influencia de estos ceros en la respuesta dinámica del proceso.

Ejercicio E1.5. Sea un proceso genérico de segundo orden descrito por la ecuación:

$$y(k) = a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2) \qquad \text{(E1.3)}$$

cuya función de transferencia en z es:

$$T\ (z) = \frac{b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

Consideremos la particularización de este proceso genérico, asignando valores a sus parámetros en los siguientes casos:

1) $a_1 = 1,0$; $a_2 = -0,25$; $b_1 = 0,625$; $b_2 = -0,125$.
2) $a_1 = 1,0$; $a_2 = -0,25$; $b_1 = 1,0$; $b_2 = -0,5$.
3) $a_1 = 1,0$; $a_2 = -0,25$; $b_1 = 1,25$; $b_2 = -0,5$.

4) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = 1,66; b_2 = -1,16.
5) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = 5,0; b_2 = -4,5.
6) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = -5,0; b_2 = 5,5.

Para cada uno de estos casos:
1.- Calcular los polos, ceros y la ganancia de la función de transferencia.
2.- En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar un escalón unitario, obtener las gráficas correspondientes, y observar el tiempo de respuesta.

□

Ejercicio E1.6. Consideremos la particularización de un proceso genérico descrito por la ecuación (E1.3) del ejercicio anterior, asignando valores a sus parámetros en los casos siguientes:

1) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = 0,416; b_2 = 0,083.
2) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = 0,333; b_2 = 0,166.
3) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = 0,294; b_2 = 0,205.
4) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = 0,263; b_2 = 0,236.
5) a_1 = 1,0; a_2 = -0,25; b_1 = 0,238; b_2 = 0,261.

Para cada uno de estos casos:
1.- Calcular los polos, ceros y la ganancia de la función de transferencia.
2.- En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar al proceso un escalón unitario y analizar las gráficas correspondientes.

□

El siguiente ejercicio experimenta la influencia de la aplicación de un filtro a la salida del proceso en el valor de los parámetros que determinan la ecuación dinámica entre la entrada del proceso y la salida filtrada.

Ejercicio E1.7. Sea un proceso que responde a la ecuaciones:

$$y_a(k) = a_1 \cdot y_a(k-1) + a_2 \cdot y_a(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2) \qquad \text{(E1.4)}$$

$$y(k) = y_a(k) + n_y(k) \qquad \text{(E1.5)}$$

donde $n_y(k)$ es un ruido blanco gaussiano de media 0 y desviación estándar 0,05, y consideramos un filtro de primer orden sobre la variable de salida $y(k)$ definido por la ecuación:

$$y_f(k) = F \cdot y_f(k-1) + (1-F) \cdot y(k) \qquad \text{(E1.6)}$$

Consideremos la particularización de este proceso genérico y del filtro, asignando valores a sus parámetros en los casos siguientes:

1) a_1 = 0,9; a_2 = 0; b_1 = 0,1; b_2 = 0; F = 0,25

2) $a_1 = 0,9$; $a_2 = 0$; $b_1 = 0,1$; $b_2 = 0$; F = 0,75
3) $a_1 = 1,0$; $a_2 = -0,25$; $b_1 = 0,333$; $b_2 = 0,166$; F = 0,25
4) $a_1 = 1,0$; $a_2 = -0,25$; $b_1 = 0,333$; $b_2 = 0,166$; F = 0,75

Para cada uno de estos casos:
1.- Calcular los polos, los ceros y la ganancia de la función de transferencia del proceso sin filtro y con filtro, en ausencia de ruido de medida.
2.- En el escenario de simulación genérico, y partiendo de sus condiciones iniciales de equilibrio, aplicar al proceso un escalón unitario y obtener las gráficas de la salida del proceso y de la salida filtrada.
3.- Repetir el punto anterior eliminando el ruido de medida sobre la salida del proceso.
4.- Derivar la ecuación que relaciona directamente la entrada al proceso con la salida filtrada a partir del cálculo realizado en el punto 1.
5.- Aplicar en el escenario de simulación genérico, utilizando como ecuación del proceso la derivada en el punto anterior y sin considerar ruido de medida, un escalón unitario. Obtener la gráfica de la salida de este proceso y comprobar que esta gráfica coincide con la gráfica obtenida en el punto 3 para la salida filtrada.

□

E1.3 COMENTARIOS A LOS EJERCICIOS

Ejercicio E1.1: Puede observarse que en los casos 1) y 2) los procesos son estables, mientras que los casos 3) y 4) corresponden a procesos inestables, aunque los dos tiene naturaleza diferente; en el caso 3) la salida tiende a infinito integrando el valor de la entrada, mientras que en el caso 4) la salida tiende a infinito exponencialmente.

De acuerdo con la teoría clásica de estabilidad de los sistemas lineales, podemos observar que el valor de z que anula el denominador de la función de transferencia (denominado polo), coincide en los cuatro casos con el valor del parámetro a. Por lo tanto, en el plano complejo el polo estará dentro del círculo unidad en los casos 1) y 2); en la circunferencia unidad en el caso 3); y, en el caso 4) fuera de dicho círculo. Asimismo, se puede observar que, aunque los casos 1) y 2) corresponden a procesos estables, la respuesta en el 1) es más rápida que en el 2). Esto se debe a que el parámetro a determina la velocidad de la respuesta ante una entrada en escalón, siendo ésta tanto más rápida, cuanto menor sea el valor del citado parámetro a. Por otro lado, el parámetro b es el que determina la ganancia del proceso.

De hecho, si introducimos el índice de tiempo $n = k - k_0$, donde k_0 es el instante en el que se aplica el escalón unidad a la entrada del proceso, podemos fácilmente observar que para n = 1 la salida del proceso en todos los casos es igual a b, y genéricamente:

$$y(k) = b \cdot (1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}) \qquad \text{(E.1.7)}$$

siendo que el miembro derecho de la ecuación E.1.7 es una progresión geométrica, cuya razón es a, podemos escribir

$$y(n) = b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a} \qquad \text{(E.1.8)}$$

En los casos 1) y 2), siendo a menor que 0, el término a^n, tenderá a 0 cuando n tienda a infinito. En consecuencia la salida del proceso tenderá al valor b / (1 – a), que será el valor de la ganancia. Es evidente que cuando a se aproxime a 0, la salida del proceso alcanzará la ganancia más rápidamente, y cuando se aproxime a 1 más lentamente, como puede observarse en los resultados del ejercicio.

En el caso 3), la expresión E.1.2., dado que el valor de a es igual a 1, pasará a ser:

$$y(n) = n \cdot b \qquad \text{(E1.9)}$$

es decir, la salida del proceso integra el valor de b con el tiempo.

En el caso 4), al ser a mayor que 1, de acuerdo con la expresión E.1.3., la salida del proceso tenderá a infinito.

Ejercicio E1.2: Este ejercicio muestra la influencia de la elección del período de control en el valor de los parámetros del proceso. El alumno puede deducir que cuando el período de control tiende hacia cero, el parámetro b tiende asimismo hacia cero y el parámetro a tiende hacia el valor 1. la explicación intuitiva es que cuando el período de control tiende a cero, el efecto de una acción de control sobre la salida del proceso en el siguiente período de control, representado dicho efecto por el parámetro b, también tenderá a cero. Asimismo, para procesos estables, cuando el período de control tiende a cero el cambio en la salida del proceso también tenderá a cero, y en consecuencia el parámetro a tenderá a 1. Asimismo, el alumno puede observar que cuando el período de control tiende a infinito el parámetro b tiende a la ganancia del proceso y el parámetro a tiendo a cero, resultado igualmente intuitivo porque la salida del proceso cuando el período de control tiende a infinito tenderá a depender únicamente de la acción de control previa.

Ejercicio E1.3: En los casos 1), 2) y 3) existe un polo doble real igual a 0,8, 0,5 y 0,2 respectivamente. Puede observarse que el tiempo de respuesta aumenta con la parte real del polo doble, siendo en el primer caso de aproximadamente 20 períodos de control, en el segundo de 7, y en el tercero de 4. Puede observarse asimismo, que la ganancia en todos ellos es igual al unidad. De hecho, el cálculo de la ganancia puede hacerse a partir de los parámetros a y b asignando al operador z el valor 1 en la función de transferencia. En la sección 11.4.4. de la Unidad Didáctica 6 se explica intuitivamente este resultado.

En el caso 4) existen dos polos reales simples iguales a 0,2 y 0,8. Podemos observar que el tiempo de respuesta en este caso es aproximadamente de 14 períodos de control, estando la primera parte de la respuesta dominada por el polo 0,2, es decir, una respuesta inicialmente rápida, y la segunda parte dominada por el polo 0,8, es decir, que es más lenta en alcanzar el valor permanente.

En el caso 5) existen dos polos reales simples iguales a 0,8 y 1,1. Este segundo se encuentra situado fuera del círculo unidad y determina la inestabilidad del proceso.

Ejercicio E1.4: En este ejercicio la parte real del polo conjugado es siempre igual a 0,6, mientras que la parte imaginaria toma, a lo largo de los cinco casos considerados, los valores absolutos de j0,1, j0,3, j0,6, j0,8 y j0,9 respectivamente. Puede observarse como es la parte imaginaria del polo la que causa un mayor o menor nivel de oscilaciones. En efecto, si la parte imaginaria está cercana a cero, la oscilación es mínima. Esta oscilación aumenta a medida que el aumento de la parte imaginaria aproxima al polo a la circunferencia unidad. La oscilación se auto mantiene, resultando así un sistema neutramente estable, cuando el polo se sitúa en la circunferencia unidad, mientras que las oscilaciones tienden a crecer de manera ilimitada cuando el polo se sitúa ya fuera del círculo unitario, provocando de esta manera la inestabilidad del proceso.

Ejercicio E1.5: En todos los casos la función de transferencia tiene un polo doble igual a 0,5 y un cero, que en los casos 1), 2) y 3) vale 0,2, 0,5 y 0,6 respectivamente. En estos casos aumenta la rapidez de la respuesta del proceso a medida que aumenta el valor del cero. Cuando el valor del cero es igual al valor del polo, el cero cancela un polo y la respuesta del proceso coincide con la de primer orden para dicho polo.

En los casos 4) y 5) el valor del cero es igual a 0,7 y 0,9; y se produce una sobreoscilación de la respuesta del proceso sobre el valor permanente, que aumenta al acercarse el polo a 1. El caso 6), donde el valor del cero es igual a 1,1, corresponde a un cero fuera de círculo unidad y tiene una respuesta que se inicia en sentido contrario al del valor permanente, y es típica de los procesos con inverso inestable. Aunque este cero "inestable" no vuelve inestable la respuesta del proceso, sí que puede inestabilizar el sistema de control adaptativo predictivo del proceso como se analiza en la Unidad Didáctica 2.

Ejercicio E1.6: El valor de los ceros para los distintos casos es –0,2, –0,5, -0,7, -0,9 y –1,1 y para todos ellos, la respuesta del proceso es similar y sin sobrepasamiento, con un tiempo de respuesta de aproximadamente ocho períodos de control. El efecto del polo inestable sobre el lazo de control será analizado en la Unidad Didáctica 2.

Ejercicio E1.7: La aplicación de un filtro de primer orden es sencilla y permite, generalmente, mejorar el rendimiento del sistema de control, minimizando el impacto del ruido de medida sobre el mismo. Directrices para el uso de filtros de primer orden se recogen en la Unidad Didáctica 6, Capítulo 11, Sección 4.3. La aplicación de este tipo de filtro añade un polo a la función de transferencia del proceso filtrado, que es igual al valor del complemento a uno de la constante de filtro, sin modificar la ganancia del proceso en cuestión. En consecuencia, el añadir un filtro a la salida del proceso cambia los parámetros del proceso bajo control, que en definitiva es el proceso filtrado, e incluso aumenta el orden del mismo. Es por ello que la aplicación de un filtro en un lazo de control no adaptativo requerirá el correspondiente ajuste en los parámetros del controlador. En el contexto adaptativo predictivo este ajuste no será necesario, ya que la modificación paramétrica será tenida en cuenta por el mecanismo de adaptación. Las consideraciones realizadas para un filtro de primer orden son extensibles a filtros de segundo orden y de órdenes superiores.

Comentarios finales:

Como ya se ha indicado, los ejercicios considerados para esta Unidad Didáctica se han centrado en un análisis experimental de procesos de primero y de segundo orden, dado que el análisis de procesos de órdenes superiores siempre puede reducirse al análisis de una suma de este tipo de procesos. Por otra parte, la respuesta del proceso a la señal de control no es de naturaleza diferente a la respuesta a perturbaciones medibles por lo que la experimentación realizada es igualmente válida par éstas últimas.

Se exhorta al alumno a que experimente en el escenario de simulación genérico con diferentes definiciones de la ecuación del proceso de órdenes superiores a los considerados en los ejercicios y en las cuales simule cambios, tanto en la señal de control como en las perturbaciones medibles.

Por último, cualquier proceso multivariable, con n salidas y m entradas, puede siempre considerarse descompuesto en n procesos de una salida y m entradas, equivaliendo la experimentación del conjunto a la experimentación de la suma de las partes. Dichos n procesos de una salida y m entradas pueden considerarse como una simple extensión, añadiendo las perturbaciones medibles que sean pertinentes, de los procesos que han sido objeto de análisis experimental en los ejercicios de esta Unidad Didáctica.