



## UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control

**ASIGNATURA: TÉCNICAS AVANZADAS DE CONTROL**

### **EJERCICIOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 2**

#### E2.1 INTRODUCCIÓN

Los ejercicios que se proponen en esta Unidad Didáctica tienen como objeto que el alumno experimente la aplicación de control predictivo a distintos tipos de procesos, utilizando tanto la estrategia básica como la extendida y en un entorno mono o multivariable. La aplicación de la estrategia extendida de control predictivo se llevará a cabo utilizando la solución particular de diseño considerada en la sección 4.4 del segundo capítulo de esta Unidad Didáctica, y consideraremos, a menos que se indique lo contrario, que los parámetros de las ecuaciones del proceso y del modelo predictivo son iguales.

Para realizar los ejercicios en cuestión el alumno debe de disponer de un entorno de programación similar al ya considerado para la realización de los ejercicios de la Unidad Didáctica 1 y preparar un programa de simulación tipo basado en un bucle *for*, cuyo índice  $k$  representará el tiempo de simulación medido en períodos de control, cuyo valor inferior será 0 y valor superior la duración del experimento. Cada ejecución de dicho bucle deberá contemplar las siguientes operaciones:

1. Ejecutar, a partir de las condiciones previas o las iniciales, la ecuación del proceso para obtener el correspondiente valor de la variable de salida.
2. Bajo control manual, determinar la señal de control a aplicar en el siguiente instante de control.
3. Bajo control predictivo: a) Calcular la salida deseada del proceso en el instante  $k + \lambda$  empleando para ello la ecuación (4.26) de esta Unidad Didáctica; y b) Calcular la acción de control predictivo mediante la ecuación (4.19) de esta misma Unidad Didáctica.

Previamente a la ejecución de este bucle *for* deberá, en cada caso, elegirse el valor del horizonte de predicción  $\lambda$ . A partir de él, según se indica en la sección 4.5.1 de esta Unidad Didáctica, se calcularán los parámetros  $\varphi_i^{(\lambda)}$ ,  $\delta_i^{(\lambda)}$  y  $\mu^{(\lambda)}$  que se utilizan en la ecuación (4.26) para el cálculo de la salida deseada en  $k + \lambda$ . Asimismo, a partir de  $\lambda$  se calcularán, de acuerdo con las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.18), los parámetros  $e_i^{(\lambda)}$ ,  $g_i^{(\lambda)}$  y  $h^{(\lambda)}$  que se utilizan en la ecuación (4.19) para el cálculo de la acción de control predictivo.

La aplicación de la estrategia básica de control predictivo corresponde al caso particular en el que  $\lambda = 1$ , en el que la ecuación (4.26) equivale a la ecuación (3.9) y la ecuación (4.19) equivale a la (3.10).

Para permitir el correspondiente análisis, el programa tipo deberá posibilitar el almacenamiento de datos y la realización de gráficas de las variables de entrada y salida del proceso, y de la salida predicha (bajo control manual) o de la salida deseada (bajo control automático).

## E2.2 EJERCICIOS UTILIZANDO LA ESTRATEGIA BÁSICA

Los objetivos didácticos de los ejercicios que se proponen en esta sección son:

- a) Ilustrar la utilización de distintas dinámicas deseadas en bucle cerrado.
- b) Ilustrar la limitación de la estrategia básica cuando se aplica a procesos con inverso inestable.
- c) Ilustrar la aplicación de control predictivo en un contexto multivariable.

### E2.2.1 Control monovariable

Para los ejercicios de esta sección se considerara un escenario de simulación estándar definido en los siguientes puntos:

- Partiendo de condiciones de equilibrio nulas, se aplicará bajo control manual, un escalón unitario en la entrada del proceso en el instante 30.
- En el instante 70, se devolverá, bajo control manual, la acción de control al valor 0.
- En el instante 100, se pasará de control manual a control predictivo, haciendo la consigna inicial igual a 0.
- En el instante 130, se cambiará la consigna del valor 0 al valor 1.
- En el instante 170, se devolverá la consigna al valor 0.
- En el instante 200 se terminará el experimento en simulación.

Los ejercicios E2.1 a E2.4 que se proponen a continuación pretenden ilustrar la utilización de distintas dinámicas deseadas en la aplicación de control predictivo, utilizando la estrategia básica.

**Ejercicio E2.1.** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar a un proceso de segundo orden, cuya ecuación responde a:

$$y(k) = y(k-1) - 0,25 \cdot y(k-2) + 0,333 \cdot u(k-1) + 0,166 \cdot u(k-2)$$

donde la trayectoria deseada se particulariza según una dinámica de primer orden, asignando valores a los parámetros no nulos de la ecuación (3.9), en los siguientes casos:

- 1)  $\alpha_1 = 0,95; \beta_1 = 0,05$
- 2)  $\alpha_1 = 0,9; \beta_1 = 0,1$
- 3)  $\alpha_1 = 0,8; \beta_1 = 0,1$

□

**Ejercicio E2.2.** Aplicar control predictivo en el escenario de simulación estándar a un proceso cuya ecuación responde a:

$$y(k) = 1,2 \cdot y(k-1) - 0,45 \cdot y(k-2) + 0,25 \cdot u(k-1) + 0,25 \cdot u(k-2)$$

donde la trayectoria deseada se particulariza de la forma indicada en los siguientes casos:

- 1) Al hacer un cambio en escalón de la consigna, la salida deseada alcanza un 7% de la respuesta en régimen permanente al cabo de un período de control.
- 2) Al hacer un cambio en escalón de la consigna, la salida deseada alcanza un 7,84% de la respuesta en régimen permanente al cabo de dos períodos de control.
- 3) La dinámica deseada es de primer orden con un polo igual a 0,8.

□

**Ejercicio E2.3.** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar a un proceso cuya ecuación responde a:

$$y(k) = y(k-1) - 0,21 \cdot y(k-2) + 0,105 \cdot u(k-1) + 0,105 \cdot u(k-2)$$

donde la trayectoria deseada se particulariza según una dinámica de segundo orden, de la forma indicada en los siguientes casos:

- 1) La dinámica deseada está definida por dos polos, cuyos valores son 0,2 y 0,6; y un cero igual a -1.
- 2) La dinámica deseada está definida por dos polos, cuyos valores son 0,2 y 0,7; y un cero igual a -1.
- 3) La dinámica deseada está definida por dos polos, cuyos valores son 0,3 y 0,7; y un cero igual a -1.
- 4) La dinámica deseada está definida por dos polos, cuyos valores son 0,4 y 0,7; y un cero igual a -1.
- 5) La dinámica deseada está definida por dos polos, cuyos valores son 0,4 y 0,8; y un cero igual a -1.

□

**Ejercicio E2.4.** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar, donde la dinámica deseada es de segundo orden y está definida por un polo doble de valor 0,6, y el proceso responde a una ecuación tal como:

$$y(k) = a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2)$$

cuya ganancia es igual a 1 y sus polos y ceros se particularizan en los siguientes casos:

- 1) El proceso tiene polos complejos conjugados de valor  $0,8 \pm i0,2$  y un cero igual a -0,5.
- 2) El proceso tiene polos complejos conjugados de valor  $0,8 \pm i0,5$  y un cero igual a -0,5.
- 3) El proceso tiene polos complejos conjugados de valor  $0,6 \pm i0,5$  y un cero igual a -0,5.

- 4) El proceso tiene polos complejos conjugados de valor  $0,4 \pm i0,2$  y un cero igual a  $-0,5$ .
- 5) El proceso tiene polos complejos conjugados de valor  $0,4 \pm i0,5$  y un cero igual a  $-0,5$ .

□

El ejercicio E2.5 que se propone a continuación pretende ilustrar la limitación de la estrategia básica cuando se aplica a procesos con inverso inestable.

**Ejercicio E2.5.** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar, donde la dinámica deseada vendrá determinada por un polo doble en  $0,6$  y la dinámica del proceso, descrita por una ecuación tal como:

$$y(k) = a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2)$$

se particulariza en los dos casos siguientes:

- 1) Un polo doble de valor  $0,7$ , una ganancia igual a la unidad y un cero al que se le asignarán los valores  $0,9$  y  $1,1$  y  $1,5$ , respectivamente.
- 2) Un polo doble de valor  $0,5$ , una ganancia igual a la unidad y un cero al que se le asignarán los valores  $-0,9$ ,  $-1$  y  $-1,1$ , respectivamente.

□

## E2.2.2 Control multivariable y presencia de ruido

Cuando la ecuación del proceso incluye una perturbación medible la ecuación del modelo predictivo (3.8) debería incrementarse en un sumatorio que tuviera en cuenta dicha perturbación medible, pasando a estar el modelo predictivo descrito por una ecuación tal como:

$$\hat{y}(k+1|k) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i y(k+1-i) + \sum_{i=1}^{\hat{m}} \hat{b}_i u(k+1-i) + \sum_{i=1}^{\hat{p}} \hat{c}_i w(k+1-i) \quad (\text{E2.1})$$

A partir de la cual podrá realizarse el cálculo del control predictivo de acuerdo con la estrategia básica.

Los ejercicios de esta sección pretenden ilustrar la aplicación de control predictivo en un contexto multivariable. Consideraremos que en este contexto la ecuación del proceso es tal como:

$$y(k) = a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2) + c_1 \cdot w(k-1) + c_2 \cdot w(k-2) \quad (\text{E2.2})$$

Es decir, este proceso tiene una salida,  $y(k)$ , y dos entradas, que son la acción de control,  $u(k)$ , y la perturbación medible  $w(k)$ . La función de transferencia en  $z$  de la salida del proceso puede escribirse de la siguiente manera:

$$Y(z) = T_u(z) \cdot U(z) + T_w(z) \cdot W(z) \quad (\text{E 2.3})$$

donde

$$T_u(z) = \frac{b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \quad T_w(z) = \frac{c_1 \cdot z^{-1} + c_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \quad (\text{E 2.4})$$

En este contexto multivariable  $T_u(z)$  será denominada, en lo que sigue, función de transferencia relativa a la acción de control y,  $T_w(z)$ , función de transferencia relativa a la perturbación medible.

Para los ejercicios de esta sección se considerara un escenario de simulación estándar definido por los siguientes puntos:

- Partiendo de las condiciones de equilibrio y operando bajo control manual, considerar un cambio en escalón unitario en la perturbación medible del proceso en el instante 30.
- En el instante 70, pasar de control manual a control automático, con el valor de consigna para la salida del proceso igual a 0.
- En el instante 100, devolver el valor de la perturbación medible al valor 0.
- En el instante 130, hacer un cambio de consigna de 0 a 1 y asignar a la perturbación medible del proceso un valor igual a  $-1$ .
- En el instante 170, devolver a 0 los valores tanto de consigna como de la perturbación medible del proceso.

**Ejercicio E2.6.** Aplicar control predictivo de acuerdo con el escenario de simulación estándar, bajo las siguientes condiciones:

- La dinámica deseada vendrá determinada por un polo doble en 0,6.
- La función de transferencia relativa a la acción de control vendrá determinada por un polo doble igual a 0,7, un cero igual a 0,5 y una ganancia igual a 1.
- La función de transferencia relativa a la perturbación medible vendrá determinada por un polo doble igual a 0,7, un cero igual a  $-0,5$  y una ganancia igual a  $1/2$ .

□

**Ejercicio E2.7.** Ejecútese un experimento equivalente al del ejercicio E2.6 en el que las funciones de transferencia relativas a la acción de control y a la perturbación medible se intercambian. Es decir:

- La función de transferencia relativa a la acción de control vendrá determinada por un polo doble igual a 0,7, un cero igual a  $-0,5$  y una ganancia igual a  $1/2$ .
- La función de transferencia relativa a la perturbación medible vendrá determinada por un polo doble igual a 0,7, un cero igual a 0,5 y una ganancia igual a 1.

**Ejercicio E2.8.** Ejecútese un ejercicio equivalente al ejercicio E2.6 en el que la ecuación del proceso (E 2.2) se modifica, para considerar un ruido de medida, de la siguiente forma:

$$y_a(k) = a_1 \cdot y_a(k-1) + a_2 \cdot y_a(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2) + c_1 \cdot w(k-1) + c_2 \cdot w(k-2) \quad (\text{E2.5})$$

$$y(k) = y_a(k) + n_y(k) \quad (\text{E2.6})$$

Donde  $n_y(k)$  sea igual a un ruido gaussiano de media cero y desviación tipo 0,025 (0; 0,025). □

**Ejercicio E2.9.** Ejecútese un ejercicio equivalente al ejercicio E2.8 en el que a la salida del proceso se le aplica un filtro de primer orden según la ecuación:

$$y_f(k) = F \cdot y(k) + (1-F) \cdot y_f(k-1) \quad (\text{E 2.7})$$

donde  $y_f$  será la variable a controlar y el valor de la constante de filtro  $F$  será igual a 0.5. □

**Ejercicio E2.10.** Ejecútese un experimento equivalente al del ejercicio E2.9 en el que la dinámica deseada quedará determinada por un polo doble igual a 0,75. □

## E2.3 EJERCICIOS UTILIZANDO LA ESTRATEGIA EXTENDIDA

En esta sección, los ejercicios de aplicación de la estrategia extendida considerarán, a menos que se indique lo contrario, el programa de simulación tipo descrito en la sección E2.1, de introducción de estos ejercicios, y los mismos escenarios de simulación estándar que se han considerado para los ejercicios de la estrategia básica, en los ejercicios de control monovariable y en los de multivariable, respectivamente.

Los objetivos didácticos de los ejercicios que se proponen en esta sección son:

- a) Ilustrar la respuesta en bucle cerrado del proceso dependiendo de la elección del horizonte de predicción,  $\lambda$ .
- b) Ilustrar como la estrategia extendida supera las limitaciones de la estrategia básica.
- c) Ilustrar la aplicación de control predictivo en un contexto multivariable con presencia de perturbaciones.

### E2.3.1 Control monovariable

El ejercicio que se propone a continuación pretende ilustrar cómo la respuesta en bucle cerrado depende de la elección del horizonte de predicción  $\lambda$ .

**Ejercicio E2.11.** Sea un proceso genérico definido por una ecuación tal como:

$$y(k) = a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) + b_1 \cdot u(k-1) + b_2 \cdot u(k-2)$$

En el escenario de simulación estándar, aplicar control predictivo, utilizando la estrategia extendida, donde la dinámica de referencia está definida por un polo doble de valor 0,6, para los valores del horizonte de predicción 1 (coincide con la estrategia básica), 3, 5 y 20, particularizando la ecuación del proceso de la forma indicada en los dos casos siguientes:

1. El proceso tiene polos complejos conjugados de valor  $0,8 \pm i0,2$ , un cero igual a  $-0,5$  y ganancia igual a 1. (coincide con el caso 1 del ejercicio E2.4).
2. El proceso tiene polos complejos conjugados de valor  $0,4 \pm i0,5$ , un cero igual a  $-0,5$  y ganancia igual a 1. (coincide con el caso 5 del ejercicio E2.4).

□

Los ejercicios E2.12 y E2.13 pretenden ilustrar cómo la aplicación de la estrategia extendida de control predictivo supera las limitaciones de la estrategia básica. El ejercicio E2.12 es equivalente al ejercicio E2.5, caso 1, previamente propuesto, pero sustituyendo la aplicación de la estrategia básica por la extendida. El ejercicio E2.13, es equivalente al ejercicio E2.5, caso 2, con la misma sustitución previamente mencionada.

**Ejercicio E2.12.** Consideremos un primer proceso de segundo orden cuya dinámica se particulariza mediante un polo doble de valor 0,7, una ganancia igual a la unidad y un cero igual a 0,9; y un segundo proceso igual al anterior pero en el que el valor del mencionado cero es de 1,1. Aplicar, en el escenario de simulación estándar, control predictivo para cada uno de estos dos procesos, utilizando la estrategia extendida, con una dinámica de referencia definida por un polo doble en 0,6, y para valores del horizonte de predicción  $\lambda$  igual a 1, 10 y 20.

□

**Ejercicio E2.13.** Consideremos un primer proceso de segundo orden cuya dinámica se particulariza mediante un polo doble de valor 0,5, una ganancia igual a la unidad y un cero igual a -0,9; un segundo proceso igual al anterior pero en el que el valor del mencionado cero es de -1,0; y un tercer proceso igual al anterior pero en el que el valor del mencionado cero es de -1,1. Aplicar, en el escenario de simulación estándar, control predictivo para cada uno de estos dos procesos, utilizando la estrategia extendida, con una dinámica de referencia definida por un polo doble en 0,6, y para valores del horizonte de predicción  $\lambda$  igual a 1, 2 y 5.

□

### E2.3.2 Control multivariable y presencia de ruido

Cuando la ecuación del proceso incluye una perturbación medible, partiendo de la definición del modelo predictivo según la ecuación (E2.1), el cálculo del acción de control utilizando la estrategia extendida definido por la ecuación (4.19), debería ser, asimismo, ampliado en dos términos relativos a la perturbación medible, pasando a estar dicho cálculo definido por una ecuación tal como:

$$u(k) = \hat{u}(k | k) = \left( y_r(k + \lambda | k) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} e_i^{(\lambda)} y(k+1-i) - \sum_{i=2}^{\hat{m}} \hat{g}_i^{(\lambda)} u(k+1-i) - \sum_{i=2}^{\hat{p}} \hat{f}_i^{(\lambda)} w(k+1-i) - \left( \sum_{i=1}^{\lambda} f_1^{(i)} \right) \cdot w(k) \right) / \hat{\mathbf{h}}^{(\lambda)} \quad (\text{E2.8})$$

donde se supone que la perturbación medible  $w(k)$  se mantiene, al igual que la acción de control, constante a lo largo del horizonte de predicción, y los parámetros  $f_i^{(\lambda)}$  y  $f_1^{(i)}$  pueden calcularse a partir de los parámetros  $a_i$  y  $c_i$  de la ecuación del modelo predictivo mediante expresiones recursivas similares a las dadas en (4.8) y (4.9). Se exhorta al alumno para que compruebe la veracidad del cálculo de la acción de control predictivo, mediante la ecuación (E2.8), cuando se utiliza la solución particular de la estrategia extendida de control predictivo, considerada en la sección 4.4 de esta Unidad Didáctica, y se considera, en el modelo predictivo, la existencia de una perturbación medible.

Por lo tanto, la secuencia de operaciones requerida en el entorno multivariable que vamos a considerar en los ejercicios que se proponen a continuación, será similar a la ya considerada inicialmente en el programa de simulación tipo, pero ampliando adecuadamente los cálculos para tener en cuenta la existencia de una perturbación medible.

Los ejercicios E2.14 y E2.15 que se proponen a continuación, pretenden ilustrar la aplicación de la estrategia extendida de control predictivo, en un contexto multivariable y con presencia de ruido de medida. De hecho, el ejercicio E2.14 es equivalente al E2.7 y el E2.15 es equivalente al E2.8, utilizando en ambos casos la mencionada estrategia extendida.

**Ejercicio E2.14.** Ejecútese un experimento equivalente al del ejercicio E2.7, pero utilizando la estrategia extendida de control predictivo, donde la dinámica de referencia es igual a la dinámica deseada en dicho ejercicio, y al horizonte de predicción  $\lambda$  se le asignan valores 3, 5 y 10. □

**Ejercicio E2.15.** Ejecútese un experimento equivalente al del ejercicio E2.8, pero utilizando la estrategia extendida de control predictivo, donde la dinámica de referencia es igual a la dinámica deseada en dicho ejercicio, y al horizonte de predicción  $\lambda$  se le asigna el valor de 3. □

## E2.4 COMENTARIOS A LOS EJERCICIOS

**Ejercicio E2.1:** Puede observarse que la trayectoria de salida del proceso sigue la dinámica deseada, que en los tres casos considerados es de primer orden. La evolución de la variable de salida hacia la consigna es más rápida en el segundo caso que en el primero. Ello es debido a que la dinámica deseada presenta, en el primer caso, un polo igual a 0,95, y en el segundo igual a 0,9. Por otra parte, de la observación que el parámetro  $\beta_1$  en el primer caso es menor que en el segundo se deriva inmediatamente que la dinámica deseada en este último es más rápida. Por último, puede constatarse que en el caso 3 la salida del proceso nunca alcanzará el valor 1 de consigna, sino que se estabilizará en 0,5. Ello es debido a que la ganancia de la dinámica deseada es distinta



de 1. De hecho esta ganancia es igual a 0,5, que es el valor que alcanza la trayectoria deseada, y en consecuencia la salida del proceso, cuando la consigna es igual a 1. Este hecho ilustra la necesidad de que la ganancia de la dinámica deseada debe ser igual a 1 para que la salida del proceso siempre alcance el valor de consigna.

La estrategia básica exige en los casos considerados que la salida del proceso, que tiene una dinámica de segundo orden, siga punto a punto una trayectoria que responde a una dinámica deseada de primer orden. El carácter abrupto de la acción de control requerida tiene su origen en esta exigencia y se intensifica más en el segundo caso, donde la dinámica deseada es más rápida.

**Ejercicio E2.2:** En los casos 1) y 2) es fácil calcular la ecuación del bloque conductor si la dinámica es de primer orden. El cálculo se realizará teniendo en cuenta el porcentaje de respuesta permanente, en el primero o segundo período de control, en función de los parámetros  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  del bloque conductor y que, la suma de ambos parámetros es siempre igual a 1, que es la ganancia de la dinámica del bloque conductor. En el tercer caso el cálculo es igualmente sencillo puesto que el valor del parámetro  $\alpha_1$  es igual al del polo de la dinámica deseada.

**Ejercicio E2.3:** En el contexto de este ejercicio, puede observarse que cuanto más rápida sea la dinámica deseada con respecto a la dinámica del proceso, la acción de control que realiza un cambio en escalón en la consigna, inicialmente alcanzará un valor más alto, sobrepasando su valor final. Cuando la dinámica deseada y la dinámica del proceso son iguales, la acción de control resulta ser simplemente un escalón. Inversamente, cuanto más lenta sea la a dinámica deseada con respecto a la dinámica del proceso, la acción de control que realiza un cambio en escalón en la consigna, inicialmente alcanzará un valor más moderado, por debajo de su valor final.

**Ejercicio E2.4:** En las respuestas naturales del proceso a un escalón unitario en cada uno de los casos puede observarse que, cuanto mayor sea la parte imaginaria del polo, mayor es la sobreoscilación y más rápida es inicialmente la respuesta de la salida del proceso. En todos los casos, la salida del proceso sigue la trayectoria deseada, pero cuanto más rápida sea inicialmente la respuesta del proceso, con respecto a la dinámica deseada, más moderada es la magnitud inicial de la señal de control. En consecuencia, dado que en el caso 1) la respuesta inicial es más lenta que en el caso 2), se puede constatar, en términos generales, que en el primero la magnitud inicial de la señal de control es mayor que en el segundo. Esta misma relación entre la moderación de la señal de control inicial y la respuesta del proceso, puede observarse en los casos 3), 4) y 5). Por otra parte, las oscilaciones en la señal de control tienen el sentido de compensar las oscilaciones propias de la respuesta natural del proceso para conducir la salida del mismo a través de la trayectoria deseada.

**Comentarios al Ejercicio E2.5:** En el primer caso, el valor positivo del cero igual a 0,9 provoca una respuesta natural del proceso a un escalón unitario muy rápida y con una gran sobreoscilación. En consecuencia, cuando se aplica control predictivo con una dinámica deseada de respuesta mucho más lenta, la señal de control generada es moderada y estable. Cuando en este mismo caso el cero positivo es igual a 1,1, la respuesta natural del proceso a un escalón, primero desciende considerablemente y luego sube, de forma estable, hacia la respuesta permanente. Al aplicarse control predictivo se observa como la salida del proceso sigue la trayectoria deseada en el

cambio de consigna de 0 a 1, pero la señal de control tiende a menos infinito. Cuando el cero aumenta a 1,5, el descenso inicial de la respuesta natural es menor, pero la señal de control predictivo, al cambiar la consigna de 0 a 1, tiende a menos infinito mucho más rápidamente.

Para que la ecuación del proceso tuviera, en este caso, un cero igual a 1, los dos parámetros  $b_s$  de dicha ecuación deberían tener el mismo valor absoluto y distinto signo. Dada la relación entre la ganancia y los parámetros  $a_s$  y  $b_s$  de la ecuación del proceso, para aproximar en este caso una ganancia del proceso igual a 1, los valores absolutos de los parámetros  $b_s$  deberán tender a infinito. Por esta razón, la respuesta natural a un escalón unitario presenta un descenso, que es tanto más acusado cuanto más se acerca el cero que estamos considerando a 1.

En el segundo caso, aunque el polo del proceso es representativo de una dinámica más rápida que la deseada, el cero negativo ralentiza la dinámica del proceso, como puede observarse en su respuesta natural al escalón unitario. Es por ello que, cuando se aplica control predictivo y la salida del proceso sigue a la trayectoria deseada entre 0 y 1, la señal de control, cuando el cero negativo tiene un valor absoluto inferior a uno, es abrupta y oscilatoria, aunque esta oscilación se amortigua hasta alcanzar un valor permanente de equilibrio. Cuando el cero negativo adquiere un valor absoluto igual a 1, el rendimiento del control predictivo es análogo al previamente considerado, pero en este caso la oscilación no se amortigua. Finalmente, cuando el cero tiene un valor absoluto mayor que 1, la oscilación en la señal de control predictivo es divergente, manteniéndose como anteriormente, la salida del proceso en la trayectoria deseada.

En los dos casos, la inestabilidad observada responde a la naturaleza del cero. En efecto, en el primer caso, la tendencia exponencial de la señal de control hacia infinito, sin oscilaciones y manteniendo un mismo signo negativo, es debida al hecho de que el cero inestable es positivo. En el segundo caso, la divergencia exponencial de las oscilaciones en la señal de control es debida al hecho de que el cero inestable es negativo.

**Ejercicios E2.6 y E2.7:** Los resultados en estos dos ejercicios muestran que los cambios en el valor permanente de la acción de control son coherentes con las ganancias de las funciones de transferencia relativas a la acción de control y a la perturbación medible. En ambos ejercicios la dinámica deseada es más rápida que la dinámica de la función de transferencia relativa a la acción de control y, por ello, en ambos casos puede observarse que en las transiciones del punto de consigna existen sobrepasamientos de la acción de control sobre su valor permanente. Sin embargo, en el primer caso, el cero positivo en la función de transferencia relativa a la acción de control hace más rápida la respuesta natural de ésta, y por ello, los mencionados sobrepasamientos de la acción de control son moderados. Por el contrario, en el segundo caso, el cero negativo en la función de transferencia relativa a la acción de control ralentiza la respuesta natural de ésta, y por ello, los mencionados sobrepasamientos de dicha acción de control son más agresivos. Asimismo, para lograr los objetivos de control en el segundo caso pueden observarse oscilaciones en la señal de control debidas al cero negativo en la ecuación del controlador.

**Ejercicios E2.8, E2.9 y E2.10:** El ruido de medida  $n_y(k)$  aplicado en los tres ejercicios tiene una desviación tipo igual a 0,025, lo cual quiere decir que su valor instantáneo puede variar entre  $\pm 0,075$ , y por lo tanto, tener una amplitud entre dos instantes de control de hasta 0,15, lo cual representa un nivel considerable de las perturbaciones

actuando sobre el proceso teniendo en cuenta que los cambios de consigna considerados en estos ejercicios son del orden de la unidad.

Este nivel de ruido afecta al rendimiento del control predictivo en el sentido de que, aunque la salida medida no se desvía notoriamente del valor deseado, la señal de control generada resulta abrupta y oscilatoria, como se puede observar en los resultados del ejercicio E2.8.

Para intentar disminuir el efecto del ruido de medida observado en el ejercicio E2.8, el ejercicio E2.9 introduce un filtro de primer orden que se aplica a la salida del proceso. De esta forma, la salida filtrada, que pasa a ser la señal bajo control, contendrá un nivel de ruido inferior. De hecho, en los resultados obtenidos en el ejercicio E2.9 se puede observar que, para mantener la salida del proceso alrededor de su valor deseado, la acción de control resulta menos abrupta y con oscilaciones más moderadas y de menor frecuencia.

Sin embargo, para mejor interpretar los resultados del ejercicio E2.9, debe tenerse en cuenta que la salida filtrada responde a una dinámica distinta y más lenta que la dinámica que corresponde a la salida medida del proceso. Este cambio dinámico tiene dos consecuencias que analizamos a continuación. La primera consiste en que el modelo que utiliza el controlador predictivo, que corresponde a la dinámica de la salida del proceso sin filtrar, será ahora distinto del modelo que corresponde a la salida del proceso bajo control, que es la salida filtrada. Esta diferencia entre ambos modelos sin duda afecta al rendimiento de control.

La segunda consecuencia consiste en que el esfuerzo que debe realizar la señal de control para que la salida filtrada del proceso (más lenta) siga la trayectoria deseada, previamente establecida para la salida del proceso, será superior. De hecho puede observarse que las trayectorias de aproximación de la salida medida del proceso a la consigna son, en el ejercicio E2.9, más rápidas que en el ejercicio E2.8.

En resumen, aunque la acción del filtro puede disminuir el efecto de las perturbaciones, el cambio de dinámica introducida en la variable bajo control puede afectar el rendimiento del mismo al demandar de una acción de control más enérgica con un modelo predictivo inexacto.

Para paliar el efecto de demandar una dinámica más rápida en la salida medida del proceso o, lo que es lo mismo, pedir a la salida filtrada que siga la misma dinámica deseada que previamente pedíamos a la salida medida del proceso, el ejercicio E2.10 introduce una dinámica deseada más lenta. En los resultados obtenidos, las trayectorias de aproximación de la salida medida del proceso a su consigna son más lentas que las observadas en el ejercicio E2.9, aproximándose a las observadas en el ejercicio 8. La acción de control es, asimismo, más amortiguada y con oscilaciones menos acusadas que las observadas en el ejercicio E2.9.

Una corrección más eficaz del efecto del ruido, además de la introducción de un filtro y de la elección apropiada de la dinámica deseada para la variable bajo control, estará basada, en general, en la utilización de un período de muestreo que sea un submúltiplo del período de control, utilizando los instantes intermedios de muestreo para filtrar eficazmente la salida medida del proceso y, asimismo, la aplicación de un mecanismo

que tenga en cuenta el nivel de ruido, tal y como se describe más adelante en la sección 11.4.4. del capítulo 11 de la Unidad Didáctica 6.

**Ejercicio E2.11:** En el primer caso, cuando se aplica control predictivo con  $\lambda$  igual a 1 (estrategia básica), puede observarse que se necesita, en los cambios de consigna, una acción de control abrupta y sobreoscilante para forzar que la salida del proceso, cuya dinámica es más lenta que la dinámica de referencia, siga la trayectoria de esta última. A medida que el horizonte de predicción aumenta puede observarse como la sobreoscilación de la acción de control se modera, y la respuesta del proceso a cambios de consigna va paulatinamente aproximándose desde la trayectoria de referencia hacia la respuesta natural del proceso a un escalón. Cuando el horizonte de predicción es mayor que el período de respuesta transitoria del proceso a un escalón, es decir, en el caso en que  $\lambda$  es igual a 20, puede observarse que la señal de control que produce el cambio de consigna se convierte en el escalón que llevará la salida del proceso a su valor permanente deseado (consigna), siguiendo la propia dinámica del proceso.

Por el contrario, en el segundo caso, cuando se aplica control predictivo con  $\lambda$  igual a 1, puede observarse que se necesita, en los cambios de consigna, una acción de control moderada y sobreamortiguada para hacer que la salida del proceso, cuya dinámica es más rápida que la dinámica de referencia, se ralentice para seguir la trayectoria de esta última. A medida que el horizonte de predicción aumenta puede observarse como la amortiguación de la acción de control va disminuyendo, y la respuesta del proceso a cambios de consigna va paulatinamente aproximándose desde la trayectoria de referencia hacia la respuesta natural del proceso a un escalón. Cuando el horizonte de predicción es mayor que el período de respuesta transitoria del proceso a un escalón, es decir, en el caso en que  $\lambda$  es igual a 20, puede observarse que la señal de control que produce el cambio de consigna se convierte en el escalón que llevará la salida del proceso a su valor permanente deseado (consigna), siguiendo la propia dinámica del proceso.

En resumen, la aplicación de control predictivo con  $\lambda$  igual a 1 fuerza a la salida del proceso a seguir la trayectoria de referencia, y la misma aplicación con  $\lambda$  igual a un valor que supera el período transitorio de la respuesta del proceso a un escalón, permite que la salida del proceso se comporte de acuerdo con la dinámica del mismo. Cualquier elección intermedia del valor del horizonte de predicción conllevará asimismo una respuesta de la salida del proceso de carácter intermedio entre la dinámica de referencia y la dinámica natural del mismo.

**Ejercicio E2.12:** La aplicación de control predictivo al primer proceso muestra que la salida del mismo, en presencia de cambios de consigna, sigue la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 1, con una señal de control muy amortiguada que frena la respuesta natural del proceso. Por el contrario, cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 20 la señal de control resulta ser el escalón que llevará la salida del proceso a su valor permanente deseado, siguiendo la propia dinámica del proceso. El valor de  $\lambda$  igual a 10, provoca una trayectoria de salida del proceso intermedia entre la trayectoria de referencia y la respuesta natural del proceso, aunque más aproximada a esta última, evidenciando el papel que juega  $\lambda$  en la determinación de la dinámica del bucle cerrado.

Por su parte, la aplicación de control predictivo al segundo proceso muestra que la salida del mismo, en presencia de cambios de consigna, sigue la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 1, pero para obtener este resultado, la señal de control generada resulta en una oscilación divergente. Por el contrario, cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 20, la señal de control pasa a ser el escalón. El valor de  $\lambda$  igual a 10 provoca una respuesta intermedia entre ambos extremos, que se logra ya con una señal de control estable. Se invita al alumno a explorar los valores de  $\lambda$  en los que la señal de control pasa de ser oscilatoria divergente a oscilatoria convergente y a la eliminación de las oscilaciones.

**Ejercicio E2.13:** La aplicación de control predictivo al primer y segundo procesos considerados muestra que las salidas de los mismos, en presencia de cambios de consigna, sigue la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 1, con una señal de control fuertemente oscilatoria, aunque amortiguada en el caso primero; y permanente oscilatoria en el caso segundo. Por el contrario, cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 5 la señal de control resulta ser, en ambos casos, el escalón que lleva la salida del proceso a su valor permanente deseado, siguiendo la propia dinámica del proceso. Basta cambiar el valor de  $\lambda$  de 1 a 2, para obtener, tanto en el primer proceso como en el segundo, una trayectoria de salida intermedia entre la trayectoria de referencia y la respuesta natural del proceso, que prácticamente elimina las oscilaciones en la señal de control en ambos casos.

La aplicación de control predictivo al tercer proceso muestra que la salida del mismo sigue la trayectoria de referencia cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 1, pero la señal de control generada resulta en una oscilación divergente. Cuando el horizonte de predicción  $\lambda$  es igual a 5, la señal de control pasa a ser el escalón que lleva la salida del proceso a su valor permanente deseado. El valor de  $\lambda$  igual a 2 es capaz de generar una señal de control estable, eliminando prácticamente las oscilaciones observadas para el caso de  $\lambda$  igual a 1.

**Ejercicio E2.14:** Los resultados obtenidos muestran que los sobrepasamientos de la acción de control observados en el ejercicio E2.7, donde el horizonte de predicción  $\lambda$  era igual a 1, se moderan progresivamente al aumentar el valor de  $\lambda$  a 3, 5 y 10. Cuando el valor de  $\lambda$  es igual a 10, la acción de control que realiza un cambio de consigna en la salida del proceso se aproxima en gran medida a un escalón y la trayectoria de salida del proceso a la respuesta natural al mencionado escalón. De nuevo se constata el papel de  $\lambda$ , cuya elección puede obligar a la salida del proceso a seguir fielmente a la trayectoria de referencia ( $\lambda=1$ ), o permitir que la salida del proceso alcance sus consignas de acuerdo con su propia dinámica ( $\lambda$  elevado).

**Ejercicio E2.15:** Este ejercicio pretende comprobar si el pasar de la estrategia básica a la estrategia extendida puede tener, por sí mismo, una influencia positiva en los resultados obtenidos en el ejercicio E2.8 en el sentido de moderar las oscilaciones de la acción de control que son provocadas por el ruido de medida. Los resultados obtenidos no muestran una mejora significativa, e indican que la minimización de los efectos del ruido, como ya se ha indicado previamente, deberá estar basada en la aplicación de un filtrado eficaz de la salida del proceso, utilizando instantes de muestreo intermedios a los instantes de control, así como mecanismos basados en el nivel de ruido, tal y como

el que se describe más adelante en la sección 11.4.4. del capítulo 11 de la Unidad Didáctica 6.

Los resultados obtenidos en este ejercicio son lógicos en el sentido de que la estrategia extendida de control predictivo podríamos decir que proyecta en un horizonte de predicción las tendencias observadas en la trayectoria del proceso, las cuales se ven lógicamente afectadas por el ruido de medida.